
朱寒杰

把握本质，精准教学*

——以“绝对值三角不等式”两节同课异构课的教学为例

朱寒杰（浙江省镇海中学）
林运来（福建省厦门大学附属实验中学）

摘　要：“绝对值三角不等式”是一个重要不等式，它是通过非负数来度量的。学习“绝对值三角不等式”有助于学生掌握不等式涉及的基本知识和基本技能，逐步形成和增强应用意识。在课堂教学中，要准确定位向量形式，把握不等式的本质，引导学生走进数学应用的天地。

关键词：绝对值三角不等式；把握本质；精准教学

文章编号：1002-2171(2019)7-0017-03

2019年3月28—29日，宁波市第十一届特级教师带徒高中数学组第二次集中活动在宁波市奉化武岭中学进行。两位教师以“绝对值三角不等式”为题进行同课异构教学，他们对知识内容的深入把握和个人独到的理解，让课堂精彩纷呈。笔者有幸观摩了两位教师的课堂教学，现将听课后的感悟和思考整理成

家的是你们探究出来的这个结论是正确的，而且还有专门的名称，叫作函数的零点存在定理，以后可以作为解决问题的依据。

甚至还可以将启发再往前移，突出元认知启发：你能提出什么问题？你对自己所概括出的这个结论有什么见解？对这个结论深信不疑吗？这个结论怎么来的？通过一些特例得到的结论，……努力让学生提出结论是否可靠的问题。这种理性的精神、缜密的思维、质疑的意识，是极其宝贵的，是数学育人的本质所在。我们不应放过任何一个可能由学生提出问题的机会。

总之，要让定理“晚出场”，把抽象、概括、表征、精致、辨析（反例）、质疑……的过程做足！

（4）主动小结。仍然需努力让学生提出问题：同学们，最后你还有什么问题？在一节课临近结束、学习任务暂告一段落的时候，你觉得该做什么事？你能提出什么问题？哦，该小结一下。对，请你说说……这种探究学习任务的寻找，体现了学习的主动性，也是养成良好学习习惯所需要的。若教师在最后投影课件小结、总结再好，学生也许可以记下，但也仅仅是记忆，至于学习方法的指导、主动学习习惯的培养，可能要大打折扣了。

再好的想法，面对千变万化的课堂，面对活生生的学生，能落实多少，都是一个未知数。这就要求我们把握好理论与实践、预设与生成的关系。没有最好，只有更好，让我们努力探索下去！

参考文献：

[1]　史宁中，王尚志.普通高中数学课程标准（2017年版）解读[M].北京：高等教育出版社，2018.

[2]　中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版）[M].北京：人民教育出版社，2018.

[3]　涂荣豹.谈提高对数学教学的认识[J].中学数学教学参考，2006(1/2)：1-5.

[4]　章建跃.方程的根与函数的零点的教学[J].中国数学教育，2012(1/2)：16-18.

[5]　李尚志.核心素养怎样考(二)[J].数学通报，2018，57(4)：1-8.

*基金项目：本文系福建省教育科学“十三·五”规划2018年度立项课题“基于素养教育的高中数学有效教学研究”（立项批准号：FJJKXB18-319）成果之一。

文，与大家交流分享。

1 内容分析

近几年，高考数学浙江卷对绝对值三角不等式均有所考查，且在《浙江省高考数学考试说明》中加入了“了解不等式$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$”这一考点，考查要求从2017年版的“掌握”改为“了解”。然而，在平常的教学中，由于这部分内容出现在人教A版《数学》(选修4-5)中，多数教师没有将它作为新课讲授，甚至一部分教师把这部分知识当成学生已知的内容，直接在高考复习时进行强化练习，这样的操作导致学生对这个知识点理解不够深入，从而不能灵活运用。

基于以上原因，特级教师导师组确定了这一课题进行同课异构教学，也让学员对这部分知识有了不一样的认识。

2 教学主要环节

2.1 课题切入把握准

“从不等式的背景可以看到，许多不等关系都涉及距离的长短，面积或体积的大小，重量的大小，等等，它们都要通过非负数来表示。因此，研究含有绝对值的不等式具有重要意义。”

两位教师不约而同地从教材上的这段引言出发，开启了本节课的学习之旅。紧接着复习了实数a的绝对值的定义及$|a|$，$|a-b|$，$|a+b|$的几何意义。

之后，教师甲给出了教材中的探究1：“用恰当的方法在数轴上把$|a|+|b|$，$|a+b|$表示出来，你能发现绝对值之和与和的绝对值之间的关系吗？”

教师乙则继续循循善诱，将一个数的绝对值升级为两个数的绝对值的运算，进一步提出：“我们发现$|a||b|=|ab|$，$\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|(b\neq0)$，即两个数的绝对值之积(商)等于两个数之积(商)的绝对值。那么两个数的绝对值之和等于两个数之和的绝对值吗？即$|a|+|b|=|a+b|$成立吗？”

作为一节数学味相当浓厚的研究绝对值运算的课，两位教师在引入环节均无过多修饰，直接切入主题，准确把握教学内容。

2.2 课堂展开显智慧

教师甲紧紧抓住“距离大小”这一解决绝对值不等式的基本出发点，引导学生从几何直观出发探究$|a|+|b|$与$|a+b|$的大小关系，再辅以代数推理证明。

几何直观角度：

当$ab\geqslant0$时，$|a+b|=|a|+|b|$，如图1。

图1

当$ab<0$时，$|a+b|<|a|+|b|$，如图2。

图2

所以$|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

代数推理角度：

当$ab\geqslant0$时，$ab=|ab|$，$|a+b|=\sqrt{|a|^2+2ab+|b|^2}=\sqrt{|a|^2+2|ab|+|b|^2}=\sqrt{(|a|+|b|)^2}=|a|+|b|$；

当$ab<0$时，$ab=-|ab|$，$|a+b|=\sqrt{|a|^2+2ab+|b|^2}=\sqrt{|a|^2-2|ab|+|b|^2}<\sqrt{(|a|+|b|)^2}=|a|+|b|$，所以$|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

于是得到定理1：如果a,b是实数，则$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，当且仅当$ab\geqslant0$时，等号成立。

教师乙则将定理1进行了“模型化”处理，得到如下绝对值不等式模型：

$|\square+\bigcirc|\leqslant|\square|+|\bigcirc|$，

只要在□和○中填入不同的“量”即可，精准且高效。

两位教师对相同问题采取了不同处理策略，他们分别对下面的3个问题进行了探究：

(1)定理1的向量形式：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当且仅当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同向时，等号成立。

(2)定理1的推广延伸：$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$。

(3)定理2：如果a,b,c是实数，那么$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|$，当且仅当$(a-b)(b-c)\geqslant0$时，等号成立。

现摘取教师乙对问题(2)中“$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$”的证明过程。

由于$|\square+\bigcirc|\leqslant|\square|+|\bigcirc|\Leftrightarrow|\square+\bigcirc|-|\bigcirc|\leqslant|\square|$，故令$\square+\bigcirc=a$，$\bigcirc=-b$，即$\square=a+b$，所以$|a|-|-b|\leqslant|a+b|$，即$|a|-|b|\leqslant|a+b|$，若将$a,b$位置互换，得到$|b|-|a|\leqslant|b+a|$，故$||a|-|b||\leqslant|a+b|$。

结合定理1，则有$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$。

若将上式的b用$-b$代替，则有$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$。

虽然两位教师对教材的处理策略不同，但都体现了相同的教学理念——把握本质，精准教学。教师甲抓住绝对值三角不等式的几何本质，注重思想方法，时时渗透数学思想；教师乙则抓住绝对值三角不等式

的结构特点，注重模型应用，培养学生抽象概括能力。这些基于数形联系、图形描述和借助图形理解的活动都能促进学生数学直观的发展，让数学核心素养的培养落地生根。

3 听课感悟

3.1 向量形式定位准

教材中对于向量形式的引入，直接通过探究形式进行："如果把定理1中的实数 a，b 分别换成向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，能得出什么结果？你能解释它的几何意义吗？显然，教材的处理很直接、不够自然。于是，很多教师在处理这块内容时，花费不少心思和智慧，甚至有教师按照"先向量后数量"的顺序展开教学[1]。但是，教材引入向量形式的目的是什么？在教学中应该如何定位？笔者认为，教材引入向量形式是为了让学生更形象地理解绝对值三角不等式，它可以看成绝对值三角不等式在二维平面上的一种几何背景——三角形的两边之和大于第三边。所以笔者觉得在教学中没有必要喧宾夺主，在此过于纠缠，反而使这一知识点成为学生学习绝对值三角不等式的难点。

3.2 抓住本质助理解

"把握数学本质，启发思考，改进教学"是数学课程的基本理念之一[2]。特级教师胡建军老师在点评时，就提出了这样一个问题："绝对值三角不等式的本质是什么？"胡老师进一步指出"$|a|+|b|$ 是绝对的相加，$|a|-|b|$ 是绝对的相消，而 $|a+b|$ 则加减不明，故存在 $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ 这样的大小关系。"这样的解释将原本复杂烦琐的数学学术形态瞬间变成了通俗易懂的数学教育形态，非常有助于学生对新知的理解。事实上，绝对值三角不等式可以类比集合元素个数之间的不等关系进行学习，即"对任意集合 A 和 B，都有 $\mathrm{card}(A\cup B)\leqslant\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$"。

从形式上看，定理2只是将定理1的推广延伸中的"$a-b$"拆成了"$(a-c)-(b-c)$"。但它的意义远不止此，就如教材中所阐述的："根据这样的思想方法，我们可以讨论涉及多个实数的绝对值不等式问题。"也就是说，定理2研究的是3个实数间的绝对值不等式问题，是定理1的一般化结论，因为定理1可以看作是定理2中"当 $b=0$ 时"的特例。同时，从几何角度看，定理2与定理1的关系则是一个"平移变换"（将原点平移到 b 所对应的点）。同样地，若能抓住定理2的本质，对于学生理解、应用绝对值三角不等式是非常有用的。

3.3 精准应用需挖掘

绝对值三角不等式这个知识点看起来容易，但应用起来却很难。一方面，学生不知道在什么时候可以使用定理1及其拓展形式。这就需要教师在教学中，需从结构上对定理1进行分析。事实上，定理1给出的是"和的绝对值"与"绝对值的和"之间的大小关系。通过这个关系，能够将位于两个绝对值中的"量"拯救出来，让其"结合"在一起。所以当我们遇到多个绝对值相加减问题时，就可以使用定理1。另一方面，学生就算用了定理1，也只是知道形式上可以这样放缩，但不知道具体可以用来做什么？这就需要教师在教学中，关注定理1中的取等条件，这也是本节课的难点之一。事实上，若 a，b 之和（或差）是定值，且能满足等号成立的条件，定理1就可以用来求最值。这样，学生在运用定理1时就有了方向，首先会去分析 a，b 之和（或差）是否是定值，其次就会去看是否能满足等号成立的条件。

4 结束语

绝对值三角不等式属于数学原理性知识（相对于数学原理性知识，还有数学概念性知识与数学问题解决知识）。在数学教学中，数学原理性知识的教学占有较大的比例，通过公式教学，可以促进学生对数学公式和规律的理解，学会用数学公式和规律解决实际问题。因此，数学原理性知识教学的效率至关重要。很多情况下，学生对数学原理性知识教学的课堂反映是：听得懂老师讲解的数学原理，但自己不会运用。这就说明，学生通过教师对数学原理性知识的讲解，没有形成正确的思考角度，没有学会正确的思考方法。

笔者对绝对值三角不等式这部分知识始终有一个困惑：为什么通俗易懂的不等式学生用起来却那么困难？现在想想，主要在于教师没有上好这节课。如果教师缺少精准教学，学生就难有学科本质的把握，更谈不上知识的灵活应用。因此，在数学原理性知识的教学中，对学生思维的引导和点拨，要集中在问题的核心思想上，不仅要引导学生从数学的角度来思考和解决问题，还要引导学生对思维过程进行反思，找出自己的思维在哪个关键点上出现问题，不断修正错误思路，不断积累数学活动经验，从而提升数学素养。

参考文献：

[1] 陆学政，翁兴胜."绝对值三角不等式"的教学思考[J].中学数学教学参考（上旬），2016(7)：15-16.

[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版）[M].北京：人民教育出版社，2018.